CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Soit $E = \mathbb{R}[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée x à coefficients réels. Dans ce problème, si k est un nombre entier naturel quelconque, on note E_k le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k et $\mathcal{B}_k$ la base canonique $(1, x, \ldots, x^k)$ de E_k.

I

On considère l'application u de E_k dans E qui à tout polynôme $P \in E_k$ associe le polynôme $Q = u(P)$ défini par $Q(x) = P''(x) - 2xP'(x)$.

1°) Montrer que $u(E_k) \subset E_k$ et que u définit un endomorphisme de E_k.

2°) Calculer l'image par u du monôme x^n , pour $0 \leq n \leq k$. En déduire que la matrice représentative de u dans la base $\mathcal{B}_k$ est triangulaire supérieure.

3°) Déterminer les valeurs propres de u , et en déduire que u est diagonalisable.

4°) On considère la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Montrer que la dérivée d'ordre $n \geq 0$ de f est le produit de f par un polynôme à coefficients entiers H_n de degré n . Calculer H_0 , H_1 , H_2 et H_3 .

b) Montrer que $H_{n+1}(x) = H_n'(x) - 2xH_n(x)$ pour tout $n \geq 0$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ (on pourra utiliser la relation $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[e^{-x^2}\right] = \dfrac{d^n}{dx^n}\left[-2xe^{-x^2}\right]$) .

En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $H_n'(x) = -2nH_{n-1}(x)$.

d) Montrer que pour tout n , $0 \leq n \leq k$, H_n est un vecteur propre de u .

Déterminer la valeur propre correspondante.

5°) a) Montrer que pour tout polynôme à coefficients réels R , la fonction $e^{-x^2}R(x)$ est intégrable sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

Tournez la page S.V.P.

b) On considère l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple (P_1,P_2) d'éléments de E associe le nombre réel $\langle P_1 | P_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P_1(x) P_2(x) dx$.

Montrer que cette application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E .

6°) Soient p et q deux nombres entiers naturels tels que $p \geq 1$ et $q \geq 1$.

a) Montrer que $\langle H_p | H_q \rangle = 2p \langle H_{p-1} | H_{q-1} \rangle = 2q \langle H_{p-1} | H_{q-1} \rangle$.

(on pourra calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_p(x) H_q(x) dx$ en intégrant par parties)

b) En déduire la valeur de $\langle H_p | H_q \rangle$ pour $p \neq q$.

c) Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, calculer $\|H_p\|^2 = \langle H_p | H_p \rangle$ pour tout nombre entier naturel p .

7°) Soit P un polynôme de degré k . Montrer qu'il existe $k+1$ nombres réels c_0 , c_1 , ..., c_k tels que $P = c_0 H_0 + c_1 H_1 + \cdots + c_k H_k$, et exprimer c_p , pour tout nombre entier p tel que $0 \leq p \leq k$, en fonction de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P^{(p)}(x) dx$.

II

On considère l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre :

$$(\mathcal{E}_\lambda) \quad y'' - 2xy' + \lambda y = P(x) ,$$

où λ est un paramètre réel, et P une fonction polynôme de degré k .

Soit $(\mathcal{E}'_\lambda)$: $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, l'équation linéaire homogène associée à $(\mathcal{E}_\lambda)$.

1°) On se propose de déterminer les solutions de $(\mathcal{E}'_\lambda)$ sous forme de sommes de séries entières de x .

a) On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Etablir la relation qui doit exister entre a_{n+2} et a_n pour que y soit solution de $(\mathcal{E}'_\lambda)$.

b) Soient $f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda) x^n$ et $g_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\lambda) x^n$ les solutions de $(\mathcal{E}'_\lambda)$ développables en série entière au voisinage de 0 qui vérifient les conditions initiales $f_\lambda(0) = 1$, $f'_\lambda(0) = 0$, $g_\lambda(0) = 0$, $g'_\lambda(0) = 1$.

Calculer les coefficients $a_n(\lambda)$ et $b_n(\lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda) x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\lambda) x^n$?

c) Déterminer la solution générale de $(\mathcal{E}'_\lambda)$ en fonction de f_λ et g_λ .

d) Pour quelles valeurs de λ l'équation $(\mathcal{E}'_\lambda)$ admet-elle des solutions polynômiales non identiquement nulles ?

2°) On suppose que $\lambda = 2p$, où p est un nombre entier naturel.
Montrer que H_p est solution de $(\mathcal{E}'_\lambda)$.
Déterminer les valeurs de $H_p(0)$ et $H'_p(0)$. On pourra utiliser le développement en série entière de e^{-x^2} pour le calcul de $H_p(0)$, et la question I.4°.c pour le calcul de $H'_p(0)$. On distinguera les cas selon la parité de p.

3°) Soit q un nombre entier naturel. Exprimer $H_{2q}(x)$ en fonction de $f_{4q}(x)$ et $H_{2q+1}(x)$ en fonction de $g_{4q+2}(x)$.

4°) On suppose que λ n'est pas un nombre entier naturel pair.

a) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' - 2xy' + \lambda y = H_p(x) ,$$

où p est un nombre entier tel que $0 \leq p \leq k$. En déduire, à l'aide de la question I.7°, une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$.

b) En déduire la solution générale de $(\mathcal{E}_\lambda)$.

Fin de l'énoncé